Ing. Leonardo Bitrán

Solución matricial de retículos hiperestáticos

1.—Introducción

1.0. La linearidad de los problemas comunes al cálculo estructural (y, en general, como primera aproximación de un gran número de cuestiones de la Ingeniería cuya solución es teóricamente compleja) hace pensar en las ventajas que podrían obtenerse con la aplicación del álgebra y el análisis lineales —espacios vectoriales n—dimensionales y su operador lineal: la matriz— al planteamiento y solución de esos problemas.

Desde el punto de vista práctico, no es necesario hacer un desarrollo riguroso de tales teorías (aunque sí, resulta conveniente para la mejor comprensión del comportamiento elástico-estructural) pues el manejo numérico y la operatoria entre vectores y matrices puede concretarse a un número más o menos reducido de reglas sencillas.

En este trabajo se expondrá un procedimiento matricial para la determinación de las solicitaciones en las barras de los retículos y de la variación de tales solicitaciones cuando las cargas exteriores, las reacciones, longitudes y número de barras (grado de hiperestaticidad), de la estructura primitivamente resuelta, sufren modificaciones.

(Una complementación explicativa de los desarrollos que se efectúan se anexa en el apéndice, a continuación del texto; la demostración de las relaciones matemáticas empleadas puede encontrarse en las referencias que al final se detallan).

1.1 a) El vector

Un vector en dos dimensiones es un elemento formado por 2 escalares (números reales, para este estudio) cada uno de los cuales es la proyección del vector en los dos ejes coordenados correspondientes (no coincidentes); en tres dimensiones, es el formado por 3 escalares —proyecciones sobre los tres ejes; generalizando, un vector de n dimensiones es un elemento formado por n escalares. Este elemento se denotará por una letra minúscula a, b, c. .... x, etc.; numéricamnte, como una columna encerrada entre paréntesis cuadrados: así, un vector en 4 dimensiones es, por ejemplo:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por razones de brevedad en la notación se usa el renglón encerrado entre paréntesis de corchete (*) en lugar de la columna:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = |\ 3 \quad 5 \quad -2 \quad 0\ |$$

b) La matriz.

Una matriz (matriz cuadrada) de orden n es un conjunto de n^2 escalares, ordenados en columnas y renglones, encerrado entre paréntesis cuadrados. Se denota por una letra mayúscula A, B, C, etc.; así, una matriz de orden 4 es, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Notación.

El elemento de un vector se denotará por letra minúscula que lo caracteriza con un subíndice: a_i, b_i, $c_i \ldots$, x_i, etc.; el subíndice identifica el lugar en que está colocado el elemento. Para el vector del ejemplo anterior se tiene:

$$a_1 = 3 \quad ; \quad a_2 = 5 \quad ; \quad a_3 = -2 \quad ; \quad a_4 = 0$$

El elemento de una matriz se denotará por la minúscula de la letra que la caracteriza con dos subíndices: a_{ij}, b_{ij}, etc.; el primer subíndice indica el renglón al cual pertenece el elemento, el segundo, la columna. Para la matriz del ejemplo anterior:

$$a_{11} = 4 \quad ; \quad a_{13} = 3 \quad ; \quad a_{33} = -1 \quad ; \quad a_{42} = 4 \quad ; \quad \text{etc.}$$

1.2 a) Diagonal principal de una matriz es la diagonal que va desde el extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho.

b) Transpuesta de una matriz dada es otra matriz cuyos renglones y columnas son las columnas y renglones de aquélla; los elementos de la diagonal principal no cambian de lugar en una transposición. La transpuesta de la matriz dada más arriba es:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 10 & -5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Si a_{ij} son los elementos de A, los elementos de su transpuesta A′ son a_{ji}.

El transpuesto de un vector es un vector renglón. Así, para el vector del ejemplo:

$$a = |\ 3 \quad 5 \quad -2 \quad 0\ | \quad ; \quad a' = [3 \quad 5 \quad -2 \quad 0]$$

(*) Por razones tipográficas se empleará el paréntesis recto en lugar del de corchete.

c) Matriz simétrica es aquella igual a su transpuesta. Por ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

en la cual $b_{ij} = b_{ji}$, es decir, $B' = B$.

d) Matriz unidad es aquella cuyos elementos no nulos valen 1 y se encuentran completando la diagonal principal; se denota por I. Por ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Vector unitario es aquel en el cual la suma de los cuadrados de sus elementos vale 1. El vector e es unitario si:

$$\sum_i e_i^2 = 1$$

1. 3. Sumas (son sólo posibles entre vectores de igual dimensión y entre matrices de igual orden). La suma de dos vectores es un nuevo vector cuyos elementos son iguales a la suma de los elementos homólogos de los vectores primitivos; la suma de dos matrices es una nueva matriz, cuyos elementos son iguales a la suma de los elementos homólogos de las matrices primitivas:

$$| 1 \quad 3 | + | -1 \quad 2 | = | 0 \quad 5 |$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 4. Productos

a) Escalar por vector o matriz: el producto de un escalar por un vector (o una matriz) es un vector (o una matriz) cuyos elementos son los del vector (o la matriz primitivo multiplicados por el escalar. Ejemplo:

$$2 \, | 4 \quad -1 \quad 3 | = | 8 \quad -2 \quad 6 |$$

$$-1 . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Simbólicamente se pondrá:,

$$\alpha \, a = \alpha \, | a_i | = | \alpha a_i |$$

$$\alpha \, A = \alpha \, [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$$

b) Vector por vector, matriz por vector, matriz por matriz: (son posibles sólo cuando ambos vectores tienen igual dimensión, cuando la dismensión del vector es igual al orden de la matriz, cuando ambas matrices son de igual orden). Estos productos son asociativos y distributivos pero, en general, no conmutativos.

Vector por vector: el producto es posible cuando uno de ellos es vector renglón (a') y el otro, columna (b).

$a'\,b$ es un escalar igual a la suma de los productos entre elementos homólogos de la columna b y el renglón a':

$$[1 \quad 3 \quad -1] \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \,.\, 4 + 3 \,.\, 2 - 1 \,.\, 5 = -3$$

$$[\, a_j \,] \; | \, b_i \, | = \sum_k a_k \, b_k$$

ba' es una matriz de orden igual a la dimensión de los vectores:

$$|-4 \quad 2 \quad 5| \; [1 \quad 3 \quad -1] = \begin{bmatrix} -4\cdot 1 & -4\cdot 3 & 4\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & -2\cdot 1 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 3 & -5\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 5 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

$$| \, b_i \, | \; [\, a_j \,] = [\, b_i \, a_j \,]$$

Matriz por vector: el producto es un vector cuyos elementos son la suma de los productos entre elementos homólogos del vector y de los renglones de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$[\, a_{ij} \,] \; | \, b_i \, | = \Big| \sum_k a_{ik} \, b_k \Big|$$

Matriz por Matriz: el producto es una matriz cuyos elementos son la suma de los productos entre elementos homólogos de las columnas de la matriz de la derecha por los de los renglones de la matriz de la izquierda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 2 & 2\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 & -1\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[\, a_{ij} \,] \; [\, b_{ij} \,] = [\, \sum_k a_{ik} \, b_{kj} \,]$$

c) Matriz recíproca de una matriz dada A es otra matriz A^{-1} tal que el producto de ambas, en cualquier orden, es igual a la matriz unidad.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$$

No siempre existe la recíproca de una matriz (ver apéndice).

d) Sistemas de ecuaciones

Dado un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \, x_1 + a_{12} \, x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} \, x_n = a_1 \\ a_{21} \, x_1 + a_{22} \, x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} \, x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \, x_1 + a_{n2} \, x_2 + \ldots\ldots + a_{nn} \, x_n = a_n \end{array}\right\}$$

Podrán hacerse las siguientes designaciones:
una matriz

$$A = [\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Un vector

$$x = |\, x_i \,| = |\, x_1 \quad x_2 \dots x_n \,|$$

un vector

$$a = |\, a_i \,| = |\, a_1 \quad a_2 \dots a_n \,|$$

y, conforme a las reglas dadas para los productos, el sistema podrá escribirse en la forma

$$[\, a_{ij} \,] \quad |\, x_i \,| = |\, a_i \,|$$

o bien,

$$Ax = a$$

Multiplicando por la matriz A^{-1}, recíproca de A, se tendrá la solución literal del sistema:

$$A^{-1} Ax = Ix = A^{-1}a$$

$$x = A^{-1}a \qquad \text{(ver apéndice)}$$

2. **Resolución de retículos planos**

2. 0. En un retículo de n nudos háganse las siguientes designaciones: la barra que une el nudo i con el j: b_{ij}; l_{ij}, E_{ij}, y Ω_{ij} su longitud, módulo y sección; f_{ij} el esfuerzo que recibe (positivo si es tracción, negativo si es compresión), si entre i y j no hay barra se tendrá $f_{ij} = 0$; t_{ij} su variación de longitud (positiva si es alargamiento); e_{ij} el vector unitario (bidimensional) en su misma dirección y en el sentido $i \rightarrow j$.

2. 1. Si sobre la barra b_{ij} actúa una fuerza f_{ij} su variación de longitud es:

$$t_{ij} = \frac{l_{ij}}{E_{ij} \ \Omega_{ij}} \, f_{ij}$$

de donde, llamando

$$R_{ij} = \frac{E_{ij} \ \Omega_{ij}}{l_{ij}}$$

se tendrá

$$f_{ij} = R_{ij} \ t_{ij}$$

Ahora bien, si se designa con p_i a la fuerza exterior (vector bidimensional) que actúa sobre el nudo i del retículo, la condición de equilibrio de los n nudos determinará el sistema de n ecuaciones vectoriales:

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij} f_{ij} + p_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Sea t_i el desplazamiento en el plano (vector bidimensional) del nudo i; evidentemente será.

$$t_{ij} = e'_{ij} (t_j - t_i)$$

o sea:

$$f_{ij} = R_{ij} e'_{ij} (t_j - t_i) \tag{1}$$

ecuaciones que remplazadas en las del equilibrio conducen a:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} e_{ij} e'_{ij} (t_j - t_i) + p_i = 0$$

$R_{ij} \cdot e_{ij} \cdot e'_{ij}$ es una matriz de orden 2, puesto que $e_{ij} \cdot e'_{ij}$ lo es y R_{ij} es un escalar; llámesela V_{ij}:

$$V_{ij} = R_{ij} e_{ij} e'_{ij}$$

La ecuación de equilibrio se transforma en:

$$\sum_{j=1}^{n} V_{ij} t_j - \left(\sum_{j=1}^{n} V_{ij} \right) t_i + p_i = 0$$

Designando las matrices convencionalmente en la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} U_{ij} = -V_{ij} & (i \neq j) \\ U_{ii} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} & \end{array}\right|$$

y remplazando, se llega a obtener el sistema

$$\sum_{j=1}^{n} U_{ij} t_j = p_i$$

que puede ponerse en la forma

$$\left[U_{ij} \right] | t_i | = | p_i |$$

el cual, haciendo las designaciones evidentes, conduce a:

$$Ut = p \tag{2}$$

Este es un sistema de 2n ecuaciones con 2n incógnitas escalares; de él podrá despejarse

$$t = U^{-1} p \qquad \text{(ver apéndice)}$$

y, con los elementos del vector t se determinarán, mediante las relaciones (1), las solicitaciones en todas las barras.

2.2. Nótese que la solución de la estructura se alcanza en igual forma, ya sea el retículo iso o hiperestático y, aún, cualquiera sea su grado de hiperestaticidad.

La matriz U puede construirse fácilmente. En efecto, como los largos, módulos y secciones son datos, $R_{ij} = R_{ji}$ (escalar) puede calcularse rápidamente para cada barra. Por otra parte, se tiene $e_{ij} = - e_{ji}$ (vectores opuestos), por consiguiente:

$$V_{ij} = V_{ji}$$

lo cual indica que la matriz U es simétrica.

Si se fija un sistema de ejes normales arbitrarios en el plano resulta ser:

$$e_{ij} = | \cos\alpha_{ij} \qquad \operatorname{sen}\alpha_{ij} |$$

donde α_{ij} es el ángulo que forma la barra b_{ij} con alguno de esos ejes. Designando c_{ij} y s_{ij} en lugar de $\cos\alpha_{ij}$ y $\operatorname{sen}\alpha_{ij}$ se tendrá:

$$V_{ij} = R_{ij} \begin{bmatrix} c_{ij}^2 & c_{ij}\, s_{ij} \\ c_{ij}\, s_{ij} & s_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

lo cual permitirá construir la matriz $U = [U_{ij}]$

La determinación numérica, con una aproximación útil, de la recíproca de una matriz (como la U, que en general es de orden elevado) es prácticamente imposible por un operador intelectual –no lo es para las modernas máquinas calculadoras (ver apéndice). De allí que se recurra a diferentes técnicas de correcciones sucesivas, o métodos iterativos, con los cuales, a partir de una aproximación más o menos grosera, pueden llegar a obtenerse resultados bastante precisos.

2. 3. Suponiendo que se ha determinado una matriz U_1^{-1} como primera aproximación a la recíproca de U de tal manera que la matriz

$$B_1 = I - U_1^{-1} U$$

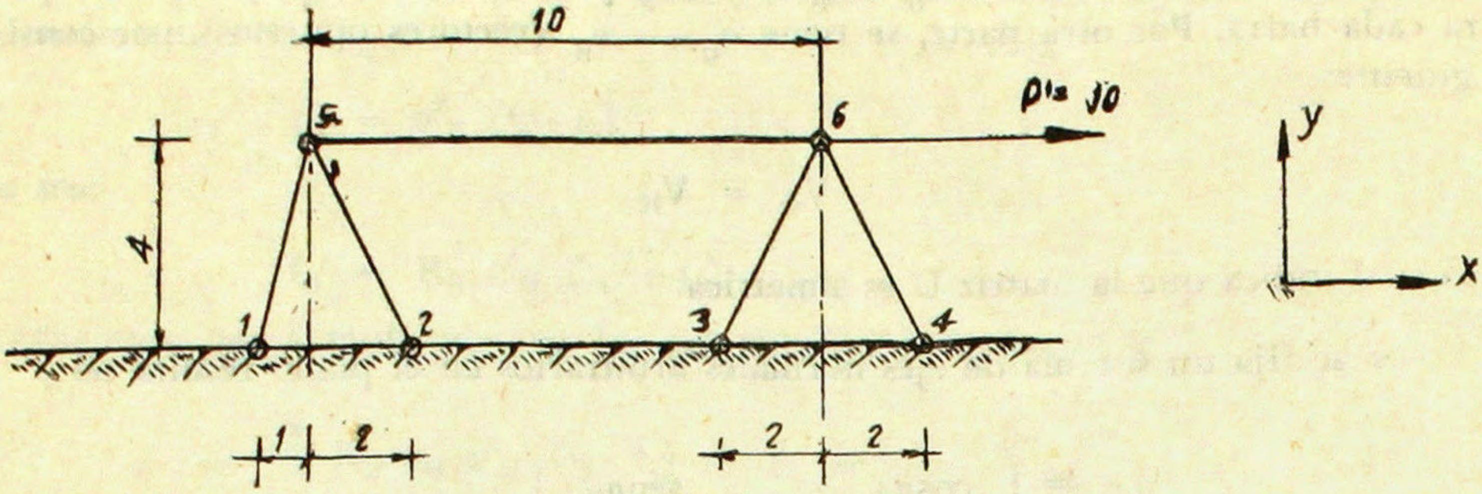
sea suficientemente pequeña (bastará, por ejemplo, que la suma de los valores absolutos de los elementos de cada renglón —o columna— de B_1 sea inferior a 1), se podrá realizar el siguiente proceso iterativo:

$$\left.\begin{aligned} t^1 &= U_1^{-1}\, p \\ t^2 &= t^1 + B_1 t^1 \\ t^3 &= t^1 + B_1 t^2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

donde t^1, t^2, t^3, etc. (se trata de supraíndices, no de exponentes) son valores cada vez más cercanos a la solución t. Generalmente bastarán 2 ó 3 iteraciones para obtener una buena aproximación (ver apéndice):

2. 4. Aplicación.

Resuélvase la estructura indicada en la figura:



$$l_{15} = 4{,}12 \qquad \Omega_{15} = 50$$
$$l_{56} = 10 \qquad \Omega_{56} = 100$$
$$l_{25} = l_{36} = l_{46} = 4{,}46 \qquad \Omega_{25} = \Omega_{36} = \Omega_{46} = 150$$

Puesto que se conocen los vectores

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = |\, 0 \quad 0 \,|$$

el sistema (2) se reduce al

$$\begin{bmatrix} U_{55} & U_{56} \\ U_{65} & U_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_5 \\ t_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, $p_5 = |\, 0 \quad 0 \,|$; $p_6 = |\, 10 \quad 0 \,|$

$$\therefore \; p = |\, 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \,|$$

Las matrices U_{ij} se construyen, de conformidad al procedimiento expuesto más arriba, en la tabla I, obteniendo:

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}174 & -0{,}105 & -0{,}100 & 0{,}000 \\ -0{,}105 & 0{,}386 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ -0{,}100 & 0{,}000 & 0{,}234 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}542 \end{bmatrix}$$

TABLA I

b_{ij}	c_{ij}	s_{ij}	c^2_{ij}	$c_{ij}s_{ij}$	s^2_{ij}	R_{ij}	V_{ij}		
64	0.447	—0.90	0.200	—0.402	0.81	0.335	0.0670	—0.134	0.271
63	—0.447	—0.90	0.200	0.402	0.81	0.335	0.0670	0.134	0.271
52	0.447	—0.90	0.200	—0.402	0.81	0.335	0.0670	—0.134	0.271
51	—0.243	—0.97	0.059	0.235	0.94	0.122	0.0072	0.0286	0.115
65	—1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.100	0.100	0.00	0.00
							U_{55}:0.1742	—0.1054	0.386
							U_{66}:0.2340	0.00	0.542
61	—0.94	—0.342	0.88	0.322	0.116	0.085	0.075	0.027	0.010
							$\bar{U}_{66}$: 0.309	0.027	0.552

Se determina una recíproca aproximada de U (ver apéndice):

$$U_1^{-1} = \begin{bmatrix} 9{,}96 & 2{,}71 & 4{,}26 & 0 \\ 2{,}71 & 3{,}37 & 1{,}16 & 0 \\ 4{,}26 & 1{,}16 & 6{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}84 \end{bmatrix}$$

deduciéndose la iterante:

$$B_1 = I - U_1^{-1}\, U = \begin{bmatrix} -0{,}020 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ -0{,}001 & -0{,}015 & 0 & 0 \\ -0{,}008 & -0{,}002 & -0{,}004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con la cual, en primera aproximación:

$$t^1 = U_1^{-1} p = | 42{,}6 \quad 11{,}6 \quad 61{,}0 \quad 0 |$$

y, con una iteración:

$$B_1 \; t^1 = | -0{,}7 \quad -0{,}2 \quad -0{,}6 \quad 0 |$$

$$t^2 = t \; = | 41{,}3 \quad 11{,}4 \quad 60{,}4 \quad 0 |$$

resultado cuyas cifras significativas no se alterarán con otra iteración. En resumen:

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = | 0 \quad 0 | \qquad t_5 = | 41{,}3 \quad 11{,}4 | \qquad t_6 = | 60{,}4 \quad 0 |$$

valores que llevados a la tabla II conducen a los esfuerzos deseados.

TABLA II

b_{ij}	$t_j - t_i$		$e'_{ij}(t_j - t_i)$			f_{ij}
64	—60,4	0	—27,0	0	—27,0	—9,2
63	—60,4	0	27,0	0	27,0	9,2
52	—41,3	—11,4	—18,4	10,2	— 8,2	—2,75
51	—41,3	—11,4	10,0	11,0	21,0	2,55
65	—19,1	11,4	19,1	0	19,1	1,91

3. Corrección por variaciones

3. 0. Cualesquiera sean las variaciones que sufra el retículo: de índole geométrica (sección y longitud de barras), de índole estática (número de barras, sistema de cargas, condiciones de apoyo), si no ha habido cambio en el número de nudos, el sistema resolutivo (2) tendrá el mismo número de ecuaciones. Tales variaciones, por consiguiente, se traducirán en modificaciones de la matriz U, del vector p y de la solución t.

3. 1 Supóngase que un retículo ha sido resuelto mediante el sistema

$$Ut = p$$

sirviéndose de la aproximación U_1^{-1} y la iterante B_1. Por medio de las ecuaciones (1) se han obtenido las solicitaciones f_{ij}.

Si la estructura sufre modificaciones, el nuevo sistema será:

$$\overline{U}\; \overline{t} = \overline{p}$$

donde $\bar{U} = U + dU$; $\bar{p} = p + dp$; $\bar{t} = t + dt$ designando por dU y dp las variaciones conocidas de matriz y vector y por dt la variación incógnita que sumada al antiguo resultado proporciona el nuevo.

Determinado $\bar{t}$. de su remplazo en las ecuaciones (1) se obtendrán las nuevas solicitaciones $\bar{f}_{ij}$.

El nuevo sistema es:

$$(U + dU)\ (t + dt) = p + dp$$

de donde:

$$(U + dU)\ dt = dp - dUt = dq \qquad (3)$$

Su solución se realizará mediante el proceso iterativo que se indica a continuación:

$$\left.\begin{array}{l} dt^1 = (I + B_1 - U_1^{-1}\ dU)\ U_1^{-1} dq \\ dt^2 = dt^1 + B_2 dt^1 \\ dt^3 = dt^1 + B_2 dt^2 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

donde $B_2 = (B_1 - U_1^{-1}\ dU)^2$ (ver apéndice) (5)

Si $U_1^{-1} dU$ es apreciablemente mayor que B_1 podrá emplearse, en lugar de la iterante indicada en (5), la matriz iterante más sencilla

$$B_2 = (U_1^{-1}\ dU)^2 \qquad (6)$$

3. 2. Aplicación

A la estructura del ejemplo anterior se le agrega una nueva barra, que une los nudos 1 y 6, de las siguientes características:

$$l_{16} = 11{,}7 \qquad \Omega_{16} = 100$$

Desde luego, la única matriz que sufre variación es la U_{66} de manera que (ver tabla I, abajo):

$$dU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}075 & 0{,}027 \\ 0 & 0 & 0{,}027 & 0{,}010 \end{bmatrix}$$

La matriz

$$U_1^{-1} dU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}320 & 0{,}115 \\ 0 & 0 & 0{,}087 & 0{,}031 \\ 0 & 0 & 0{,}426 & 0{,}164 \\ 0 & 0 & 0{,}050 & 0{,}018 \end{bmatrix}$$

resulta ser bastante mayor que la B_1 por consiguiente, se aplica la iterante dada en (6):

$$B_2 = (U_1^{-1} dU)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}142 & 0{,}054 \\ 0 & 0 & 0{,}039 & 0{,}015 \\ 0 & 0 & 0{,}190 & 0{,}073 \\ 0 & 0 & 0{,}022 & 0{,}008 \end{bmatrix}$$

Desarrollando el proceso descrito en (4):

$$dt^1 = (I + B_1 - U_1^{-1} dU)\, U_1^{-1} (-dUt) = |-9{,}9 \quad -2{,}60 \quad -15{,}1 \quad -1{,}57|$$

$$dt^2 = |-12{,}1 \quad -3{,}22 \quad -18{,}1 \quad -1{,}91|$$

$$dt^3 = |-12{,}5 \quad -3{,}35 \quad -18{,}7 \quad -1{,}98|$$

$$dt^4 = dt = |-12{,}6 \quad -3{,}37 \quad -18{,}8 \quad -1{,}99|$$

$$dt \approx |-12{,}6 \quad -3{,}4 \quad -18{,}8 \quad -2{,}0|$$

$$\bar{t} = |28{,}7 \quad 8{,}0 \quad 41.6 \quad -2{,}0| = t + dt$$

En resumen:

$$\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \bar{t}_3 = \bar{t}_4 = |0 \quad 0|;\ \bar{t}_5 = |28{,}7 \quad 8{,}0|;\ \bar{t}_6 = |41{,}6 \quad -2{,}0|$$

Llevados estos valores a la tabla III se obtienen las nuevas solicitaciones $\bar{f}_{ij}$.

TABLA III

b_{ij}	$\bar{t}_j - \bar{t}_i$		$e'_{ij}(\bar{t}_j - \bar{t}_i)$			$\bar{f}_{ij}$
64	—41,6	2,0	—18,6	—1,8	—20,4	—6,8
63	—41,6	2,0	18,6	—1,8	16,8	5,6
52	—28,7	—8,0	—12,8	7,2	— 5,6	—1,9
51	—28,7	—8,0	7,0	7,8	14,8	1,8
65	—12,9	10,0	12,9	0	12,9	1,3
61	—41,6	2,0	39,2	—0,7	38,5	3,3

4. Apéndices

—1.4. (c) El determinante de una matriz es el valor del determinante cuyos elementos son los de la matriz. Si el determinante de una matriz vale 0, dícese que la matriz es singular (en caso contrario, regular). Las matrices singulares no admiten recíproca.

—1.4. (d) Evidentemente el sistema no admite solución cuando A es singular. En ese caso, una o más ecuaciones del sistema son funciones lineales de las restantes.

La solución Cramer se obtiene aplicando la igualdad:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\ A}{\det\ A}$$

donde Adj A es una matriz especial, deducida de A, y llamada matriz adjunta; ella es la matriz cuyos elementos son iguales a los cofactores de los elementos homólogos del desarrollo del determinante det A.

—2.1. Si U es singular, la estructura no admite sólo una solución, o bien, no admite ninguna. Es el caso de retículos hipoestáticos, o mecanismos, con uno o más grados de libertad.

—2.2. La determinación de la recíproca mediante la fórmula dada más arriba (apéndice a 1.4.d), es decir, la solución Cramer de un sistema, requiere el cálculo de determinantes de órdenes elevados. Ello, como se sabe, es prácticamente imposible sin la ayuda de máquinas especiales por el alto error acumulativo en que generalmente se incurre.

—2.3. Este proceso iterativo se deduce del siguiente desarrollo.

$$Ut = p$$
$$U_1^{-1}\,Ut = U_1^{-1}\,p$$
$$[\,I - (I - U_1^{-1}\,U)\,]\,t = (I - B_1)\,t = U_1^{-1}\,p = t^1$$
$$\therefore\ t = (I - B_1)^{-1}\,t^1 = (I + B_1 + B_1^2 + \dots\quad)\,t^1$$

—2.4. Un método sencillo para el cálculo aproximado de la recíproca de una matriz es el llamado de las sub-matrices, (con el cual se ha determinado, mediante regla de cálculo, U_1^{-1} en el ejemplo). En pocas palabras el sistema consiste en lo siguiente:
Considérese a la matriz de orden n dividida en la forma indicada.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{matrix} & a_{44} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

llamando A(1) a la primera, A(2) a la siguiente, etc., hasta A(n)=A.
En general A(m) es de la forma:

$$A(m) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad A(m-1) \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-1,\,m} \end{bmatrix} \\ [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{m,\,m-1}] & a_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(m-1) & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Siendo α_{12} y α_{21} vectores columna y renglón, respectivamente.
Llamando:

$$P = a_{mm} - \alpha_{21}\,A^{-1}(m-1)\,\alpha_{12} \qquad \text{(escalar)}$$
$$q = \alpha_{21}\,A^{-1}(m-1) \qquad \text{(vector renglón)}$$
$$r = A^{-1}(m-1)\,\alpha_{12} \qquad \text{(vector columna)}$$

y

$$\underline{\overline{A}}\,(m-1) = A^{-1}(m-1) + r\,P^{-1}\,q \qquad \text{(matriz)}$$
$$\underline{\overline{\alpha_{12}}} = -\,r\,P^{-1} \qquad \text{(vector columna)}$$
$$\underline{\overline{\alpha_{21}}} = -\,q\,P^{-1} \qquad \text{(vector renglón)}$$
$$\underline{\overline{a_{mm}}} = P^{-1} \qquad \text{(escalar)}$$

se tendrá:

$$A^{-1}(m) = \begin{bmatrix} \bar{A}(m-1) & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

De esta manera, del conocimiento de la recíproca de una matriz A (m–1), se podrá pasar a la recíproca de A(m).

Como se sabe que

$$A^{-1}(2) = \frac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

en forma ascendente se calcularán las recíprocas de las matrices de orden 3, 4, etc., hasta obtener A^{-1}.

–3.1. Demostración en gran parte similar a la sugerida en el apéndice de 2.3.

Referencias

–Elementary matrices; R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar.

–Cours de Calcul Matriciel Appliqué; M. Denis–Papin, P. Kaufman.

–Algebre et Analyse Lineaires; A Lichnerowicz.

–Matrices, Aplicación a la Elasticidad y al cálculo de Estructuras; L. Bitrán. (Tesis de la cual se ha extraído este trabajo).