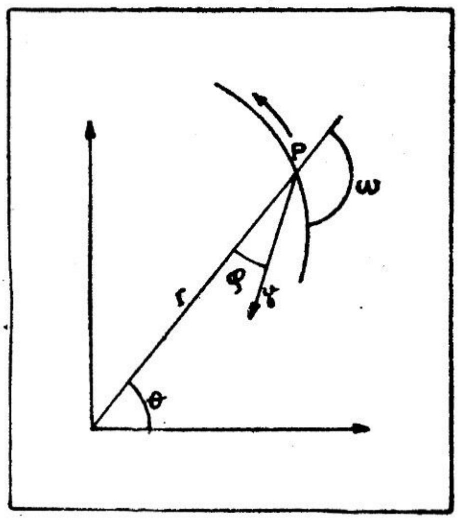
Marcos Pedrero

De la aceleración y la Geometría



DEL estudio del movimiento en el plano de un punto P. que describe una curva cualquiera he obtenido sin ninguna hipótesis las dos ecuaciones generales siguientes:

$$1)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{}{r^2 \rho \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen} (\omega + \varphi)} \\[2ex] \dfrac{d\beta}{dt} = -\gamma r \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

fórmulas en las cuales $\overline{\gamma}$ designa la celeración, β el duplo de áreas descritas en la unidad de tiempo, es decir $r^2 \dfrac{d\vartheta}{dt} = r V \operatorname{sen} \omega$, ρ radio de curvatura, φ ángulo de la aceleración con el radio polar.

Las ecuaciones son aplicables para cualquier posición del origen que se considere, y si en el instante t se considera la normal o su trayectoria y se aplica las ecuaciones se obtiene fácilmente.

$$\gamma \cos \varphi_1 = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\gamma \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{dv}{dt}$$

Es decir obtenemos las expresiones generales de las dos componentes de la aceleración, la primera es la componente normal que designaremos por γ_n y la segunda la componenente tangencial que designamos por γ_t .

Para dar simetría a las ecuaciones he elegido la cantidad Z.

$$Z=\frac{\rho}{v}\frac{dv}{ds}$$

y que es precisamente la razón entre las dos componentes de la aceleración la tangencial y la normal. Se deduce entonces una relación entre φ, ω y Z sobre la cual conviene insistir

2)
$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{\cos\omega-Z\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1+Z^2}}.$$

Si por esta ecuación se trata de expresar sen ω en función de φ y Z la ecuación toma la misma forma, es decir es equivalente cambiar ω por φ de un miembro a otro.

En todas las siencias físicas vemos continuamente términos de esta forma, y si se nos pregunta podríamos indicar su significado Pero en geometría resultan de la misma definición de velocidad y aceleración. Sin embargo la teoría de las aceleraciones centrales hace la hipótesis sen φ = O es decir destruye la simetría en las ecuaciones, y esto es equivalente a asignar a Z un valor; el coeficiente masa queda implicado, y hoy se ha comprobado que dicho coeficiente es variable y se ha creado varias masas, la masa longitudinal y la transversal.

Si observamos la ecuación (2) y recordamos las ecuaciones de la física, en especial de la Electrodinámica, encontramos completa analogía, pues figuran términos de esa forma y podremos decir lo que significa Z.

Las aceleraciones centrales no explican los fenómenos irreversibles cuyo tipo es el frotamiento y sabemos que los coeficientes de este fenómeno figuran en Z. La resistencia eléctrica se asemeja a la viscosidad de los líquidos, la hysteresis al frotamiento de los sólidos. ¿Por qué quedan inexplicables estos fenómenos en las aceleraciones centrales? Sabemos que para que las aceleraciones sean centrales debe verificarse

$$\operatorname{sen}\varphi=O$$

de donde resulta

$$Z=\cot\omega$$

Si además $\rho\operatorname{sen}^3\omega=$ cte se obtiene la ley de Newton; la última ecuación corresponde a las cónicas.

La geometría da para Z el valor

$$Z=\cot(\omega+\varphi)$$

o también

$$Z=\cot\omega\pm\frac{\rho}{v^2 r}\ \frac{d\beta}{dt}$$

Se ve entonces las consecuencias al despreciar un término en la expresión general de Z; además ese término indica una perturbación en las áreas descritas en la unidad de tiempo, y ya es demasiado conocida la del planeta Mercurio. Todo reducido a un solo término $\frac{\rho}{v^2 r}\frac{d\beta}{dt}$, y entonces no es raro que de una teoría física sobre Electrodinámica, Electricidad o Termodinámica puedan explicarse la perturbación de un planeta.

La segunda de las ecuaciones (1) nos dice que la derivada del mements de la velocidad respecto al tiempo es igual al momento de la aceleración, para cualquier punto del plano que se considere. ¿Pero cómo aplicar las ecuaciones de momento a elementos materiales en número infinito como en los gases y cuyas velocidades tienen tan diversas direcciones? Sería necesario introducir un coeficiente análogo a la masa como densidad de energía, densidad de moléculas o densidad en fase de Maxwell.

Como el valor de Z es independiente de la posición del origen de coordinados, podemos elegir en el instante t el centro de curvatura y entonces

$$4)\qquad Z = \pm \frac{1}{v^2}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i$$

y aplicando la 2.ª de ecuaciones (1) tenemos

$$5)\qquad \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i = -\gamma\,\rho\,\text{sen}\,\varphi_i$$

luego para un número cualquiera de puntos en el espacio

$$6)\qquad \Sigma\, v^2 Z = \Sigma\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i = -\Sigma\cdot\rho\gamma\,\text{sen}\,\varphi$$

considerando para cada punto su centro de curvatura en el instante t.

pero según (2)

$$7)\qquad \text{sen}\varphi = \frac{\cos\omega - Z\,\text{sen}\omega}{\sqrt{1+Z^2}}$$

y por consiguiente

$$8)\qquad \text{sen}\varphi_i = \frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}}\ *$$

Es interesante la ecuación (4) que relaciona las cantidades, Z, v y $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i$

* Se podría entonces explicar los fenómenos ópticos por esta fórmula, en que Z representara la acción del medio.

Imaginemos un móvil que parte del reposo, β es nulo antes de iniciar el movimiento y será imposible que haya movimiento sin variación de β; durante el movimiento podrá ser positivo, negativo o tener un valor más o menos constante, pero para volver otra vez al reposo tiene que producirse una variación de β para que esta cantidad vuelva a cero. Por consiguiente, la teoría de las aceleraciones centrales en que β es constante, no puede explicar estos fenómenos.

Si consideramos ecuaciones (1) que son válidas para cualquier posición del origen, y elegimos en el contante t_i el centro de curvatura correspondiente a la posición que ocupa el móvil, obtenemos

$$9)\qquad \gamma = \frac{\beta_i^{\ 2}}{\rho^3 \cos\varphi_i}$$

pero

$$\beta = rv \operatorname{sen} \omega$$

y por consiguiente

$$10)\qquad \beta_i = \rho V$$

De ambas ecuaciones se obtiene

$$11)\qquad \gamma = \frac{v^2}{\rho \cos \varphi_i}$$

pero $\rho \cos \varphi_i$ es la proyección del radio de curvatura en la dirección de la aceleración. Esta fórmula es, pues, general.

En el caso particular de la caída vertical de los cuerpos, sabemos que $\rho\cos\varphi_i$ vale muy aproximadamente 2 h, es decir, el doble de la altura de caída.**

Las dos componentes de la aceleración según la tangente y normal son respectivamente

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}$$

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$$

En un choque se produce una variaeión brusca de velocidad $\frac{dv}{dt}$ toma valores muy elevados en cambio γ_n tiene valores muy pequeños, y sabemos que Z es la razón entre la componente tangencial y normal, por consiguiente la fórmula

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\cos \omega - Z \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{1 + Z^2}}$$

se reduce aproximadamente a

* En efecto, la componente normal de la aceleración es despreciable, luego la aceleración es aproximadamente igual a la componente tangencial $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{ds}$ y con γ constante se obtene

$$\operatorname{sen} \varphi = - \operatorname{sen} \omega$$

lo que indica que la aceleración tiene aproximadamente la dirección de la trayectoría. Si la trayectoría tiende hacia la recta, y si v y $\frac{dv}{dt}$ son finitos, resulta que γ_n tenderá a cero, y por consiguiente Z tenderá al infinito. En la naturaleza no existe el movimiento rectilíneo, es decir, en todo movimiento existen las dos componentes de la aceleración. Por consiguiente, la fórmula

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

que se aplica a un movimiento aproximadamente rectilíneo, no es más que aproximado, como en el caso de la caída vertical de un cuerpo, trayectoría de la luz, etc., pues en estos casos existe la componente normal que es despreciable. En el caso de la luz la fórmula es muy aproximada en todas direcciones (existe la presión de radiación igual en todas direcciones). La cantidad Z toma en estos casos valores muy elevados y tiende al infinito para la luz.

Se puede citar analogías con la cantidad Z en termodinámica; la razón entre los calnes específicos en el punto crítico en que se verifica un cambio de estado de un cuerpo tiende al infinito. Se sabe que se asimila la energía radiante a un gas, y se obtiene que la razón entre sus calnes específicos también tiende al infinito; resulta entonces la ley de Stephan Boltman (Véase estudio que publiqué en el *Boletín de Matemáticas*, 1923, Imprenta Universitaria); su presión sería inversamente proporcional al efecto Thomson $\left(\frac{KT}{\beta}\right)$ Para los gases he establecido la fórmula siguiente, haciendo la hipótesis que dependa sólo de la temperatura:

$$\beta = \frac{T_c}{(n+1)\, p_c} \left(\frac{T_c}{T}\right)^n$$

Si se expresa p en atmósferas he observado que se puede escribir

$$\frac{T_c}{(n+1)\, p_c} = 1$$

n es igual a 3 para la energía radiante. No es entonces aventurado creer que la energía radiante tenga su punto crítico, que se aproximaría al cero absoluto si son válidas las ecuaciones anteriores. Se sabe que el helio fué licuado a 5 grados absolutos. Para Langevin la materia no sería más que el éter licuado.

Consideremos la ecuación 4)

$$V^2 = \pm \frac{1}{Z} \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i$$

* n es una constante característica para cada gas, y tiene un valor bien definido según la teoría indicada.

Multipliquemos ambos miembros por $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{\varepsilon\, v^2}{2} = \pm \frac{\varepsilon}{2Z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i$$

Tendremos para un sistema de puntos en el espacio

12) $$\Sigma \frac{\varepsilon\, v^2}{2} = \Sigma \frac{\varepsilon}{2Z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i$$

Designemos.

$$\Sigma \frac{\varepsilon\, v^2}{2} = U$$

y hagamos

13) $$d\,U = F\,dt$$

Según el principio de Carnot Cluausius

14) $$\frac{d\,Q}{T} = \frac{d\,U}{T} + \frac{A\,p\,dW}{T}$$

siendo $\frac{d\,Q}{T}$ una—diferencial exacta. Se deduce entonces

$$\frac{F}{T} = \text{Cte} = K$$

es decir

14) $$\left\{ \begin{array}{l} d\,U = K\,T\,dt \\ \dfrac{d\,\Sigma \frac{\varepsilon}{2Z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i}{dt} = K\,T \end{array} \right.$$

Se ve entonces por la 1ª de las fórmulas (14) que un cuerpo en que U v: proporcional a T, la temperatura sería una función esponencial del tiempo.

Sabemos que en las transformaciones radioactivas el número de atómos v: en función esponencial del tiempo.

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

luego $$d\,N = -N_0\,\lambda\, e^{-\lambda t}\,dt = -N\,\lambda\,dt$$

de donde

$$dt = -\frac{dN}{N\lambda}$$

y reemplazando en la expresión de U.

$$dU = KT\,dt = -\frac{K}{\lambda}\,T\,\frac{dN}{N}$$

luego

$$\frac{dN}{N} = -\frac{\lambda\,dU}{KT}$$

El primer miembro es una diferencial exacta, luego si λ fuera constante resultaría que U debería depender sólo de T y como esto no se verifica resulta entonces que

$$\frac{\lambda}{T} = f'(U)$$

es decir, la razón entre el coeficiente de las transformaciones radioactivas y la temperatura absoluta debe ser una fracción de U. y entonces

$$N = N_o\,e^{-\int \lambda\,dt}$$

De ecuaciones (6) y (8) se obtiene

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_i = \frac{\rho\gamma Z}{\sqrt{1+Z^2}}$$

i reemplazando en (14)
se obtiene

$$(15) \qquad \Sigma\frac{\varepsilon\gamma}{2}\left| d\frac{\rho}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{\rho}{\sqrt{1+Z^2}}\;\frac{d\,Log.\varepsilon\gamma}{dt}\right] = KT$$

$$\Sigma\left[\frac{\varepsilon v \gamma z}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{\varepsilon v^2}{2}\;\frac{d\,L\varepsilon}{dt}\right] = KT$$

Vemos, pues, en estas ecuaciones la cantidad Z que, como sabemos, contiene tantos fenómenos físicos inexplicables a la teoría de las aceleraciones centrales como los frotamientos. Se sabe que el principio de Hamilton, o de mínima acción, es aplicable a los fenómenos reversibles pero no a los irreversibles, cuyo tipo es el frotamiento (Véase H. Poincaré. La science et. l'Hipothèse. pág. 154).

Hemos encontrado, pues, los fenómenos físicos íntimamente ligados a una cantidad que representa la perturbación orbital de un planeta, la cantidad $\frac{d\beta}{dt}$ En Termodinámica existe una cantidad análoga que interviene en todas las fórmulas físicas modernas, es la constante de los gases perfectos. R*

$$\frac{pW}{T} = R$$

El gas perfecto no existe y R es, pues, una cantidad variable. En 1923 dí algunas conferencias que fueron publicadas en el Boletín de Matemáticas; demostré que los principios de Mayer y Carnot Clausius permiten establecer sin ninguna hipótesis, para un cuerpo una relación entre p, W, T, y los calores específicos C, c. Los calores específicos son también variables y debe considerárseles función de dos de las cantidades p, W, T. A continuación indico una de esas fórmulas, E es el equivalente mecánico del calor

$$\frac{R}{E} = \frac{(C\text{-}c)\left[1 - \left(\frac{d\,Log R}{d\,Log P}\right)_T\right]}{\left[1 + \left(\frac{d\,Log R}{d\,Log T}\right)_P\right]^2}$$

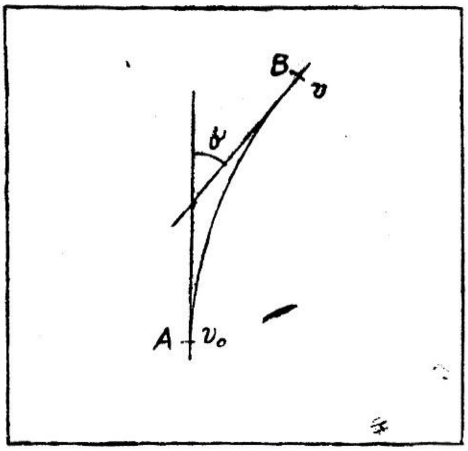
Llama la atención la forma logarítmica. La cantidad R parece depender únicamente de la entropía; yo he explicado así las diversas anomalías en los gases y obtenido la ley de radiación de Stephan Boltman para $\frac{C}{c} = \infty$.

Consideremos ahora un punto que hace el recorrido de A a B y designemos

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_0 v_0^2 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon v^2 = q$$

su variación de energía. Obtenemos fácilmente

$$** \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon v^2 = \frac{q}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} e^{2Z\alpha} - 1} = \frac{q}{e^{2Z\alpha + \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} - 1}$$



siendo α el ángulo formado por las dos tangentes a la trayectoria en A y B. La cantidad Z ha sido expresada anteriormente por fórmulas válidas para cualquier posición del origen que se adopte. Por consiguiente, tendríamos eligiendo una de las fórmulas

* Es un valor límite que alcanza el gas en ciertas condiciones de presión y temperatura

** El valor exacto es $\int z\, d\alpha$ entre A y B en lugar de $z\,\alpha$.

$$2 Z\alpha + \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = 2\alpha \cot \omega \pm \frac{2\rho\alpha}{v^2 r}\,\frac{d\beta}{dt} + \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

Se podría suponer que estos términos desempeñan un rol especial en la producción de las diversas clases de energía. Sabemos que $\frac{d\beta}{dt} = -\gamma r \operatorname{sen}\varphi$ según ecuaciones (1). Si la trayectoria se aproxima a la recta $Z\alpha$ tiene hacia $\frac{2s\gamma}{v^2}$.

Encontramos en la teoría de Planck sobre los quanten de energía una fórmula análoga. Si consideramos N puntos se tendría

$$\tfrac{1}{2} N \varepsilon v^2 = U$$

$$U = \frac{Nq}{e^{Z\alpha + \log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} - 1}$$

Es decir, encontramos nuevamente la cantidad Z.

Langevin desarrolla una teoría sobre el paramagnetismo apoyándose en una ley de Maxwell-Boltman sobre mecánica estadística, y obtiene para la intensidad la fórmula siguiente

$$Y = N\mu\left\{\cot h\, a - \frac{1}{a}\right\}$$

siendo

$$a = \frac{\mu H}{RT}$$

siendo μ una constante, R la constante de los gases perfectos, H la intensidad del campo, T la temperatura absoluta. Hemos visto en nuestro estudio Geométrico que $Z = \cot(\omega + \varphi)$. ¿Se podría creer que son simples coincidencias que figure una cotangente? Pero sabemos que Z, como ya hemos indicado anteriormente, encierra todos los fenómenos irreversibles cuyo tipo es el frotamiento.